Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ERPC

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et développement limité (12 questions) **Page 3**

2. Système électrique : signaux d'entrée et de sortie et transformées de Laplace (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-erpc.fr/assets/annales/bts-erpc/E2 - Mathématiques/2022/BTS ERPC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et développement limité

Un chariot de fête foraine se déplace initialement à 20 m/s et ralentit sous l'effet d'un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction définie à partir d'une équation différentielle, puis étudiée pour déterminer son évolution, la distance parcourue et le comportement local de sa courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0, en utilisant la formule fournie.

La formule fournie s'applique avec le coefficient $a = 0{,}8$. Toute solution de l'équation homogène sur $[0;+\infty[$ est donc de la forme $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, où k est une constante réelle. En prenant $k = 0$, on obtient aussi la solution nulle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$.
2. Dans l'équation, le membre de gauche vaut $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$.

Cette égalité étant vraie pour tout $t \geq 0$, la fonction g est bien une solution de (E).

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de $y' + 0{,}8y = 4$.

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). Toute solution de cette équation s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée, soit $ke^{-0{,}8t}$. La constante k peut prendre toute valeur réelle ; la famille obtenue donne ainsi toutes les solutions sur $[0;+\infty[$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

1. D'après la question précédente, $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$.
2. La condition initiale impose $f(0) = 5 + k = 20$, car $e^0 = 1$, donc $k = 15$.

La solution qui vérifie la condition initiale est donc déterminée en remplaçant k par 15.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **À partir de l'expression f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par somme et produit, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers zéro, tandis que le terme constant reste égal à 5. La limite de $f(t)$ est donc 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative C admet une asymptote, puis en donner une équation.**

> La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ est finie et vaut 5. La courbe C admet donc une asymptote horizontale à droite. L'ordonnée de cette droite est la valeur de la limite ; son équation est ainsi $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. **En utilisant f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0;+\infty[$.

Question 3. Déterminer, à partir de l'étude de la vitesse du chariot, si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Un arrêt correspondrait à une vitesse nulle. Or, pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste positive et tend vers $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$ sans atteindre cette limite en un temps fini. Elle ne s'annule donc jamais : le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$ et ne s'annule jamais.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

1. Par dérivation de l'exponentielle, $\left(-18{,}75e^{-0,8t}\right)' = 18{,}75 \times 0{,}8e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$.
2. On a aussi $(5t)' = 5$.

Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$, ce qui vérifie que F est une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre t = 0 et t = 1 à l'aide de l'intégrale de sa vitesse, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue entre 0 et 1 est $d = F(1) - F(0)$. En remplaçant dans l'expression de la primitive, on obtient $d = (-18{,}75e^{-0,8} + 5) - (-18{,}75) = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0,8}$. Cette distance vaut environ $15{,}3251$ mètres, soit $15{,}33$ mètres arrondie au centimètre.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15{,}33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro parmi les propositions, puis la recopier sur la copie sans justification.

> Le polynôme de Taylor affiché est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Le développement limité à l'ordre 2 comporte le reste $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les propositions, il faut donc retenir celle qui présente le terme quadratique $4{,}8t^2$ et ce reste.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + 4{,}8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

1. Le point de tangence est $(0; f(0)) = (0; 20)$.
2. La pente de la tangente vaut $f'(0) = -12e^0 = -12$.

La tangente passant par $(0; 20)$ et de coefficient directeur -12, son équation est $y = 20 - 12t$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Système électrique : signaux d'entrée et de sortie et transformées de Laplace

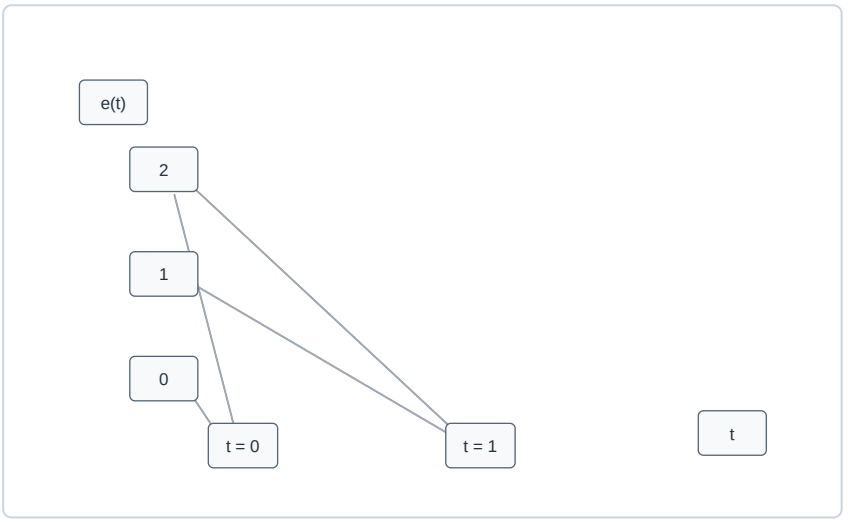
Un système électrique entrée-sortie reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). Les transformées de Laplace servent à déterminer le signal de sortie, son expression sur plusieurs intervalles et sa représentation graphique.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative du signal d'entrée e(t).

Le signal est causal : il est nul pour t < 0. À t = 0, U(t) vaut 1 tandis que U(t - 1) vaut 0, donc e(0) = 2. Le signal reste égal à 2 jusqu'à t = 1 exclu. À partir de t = 1, les deux échelons valent 1 et e(t) vaut 1. La courbe est donc en escalier, avec une chute d'une unité en t = 1.

Signal d'entrée e(t)



Tracé en escalier : niveau 0 avant t = 0, niveau 2 jusqu'à t = 1, puis niveau 1.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> e(t) = 0 pour t < 0, 2 pour 0 ≤ t < 1, et 1 pour t ≥ 1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

Le formulaire donne les transformées de Laplace de U(t) et de l'échelon retardé U(t - 1) : elles valent respectivement 1/p et e^{-p}/p. Par linéarité, la transformée de e(t) = 2U(t) - U(t - 1) s'obtient en multipliant la première par 2, puis en retranchant la seconde.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(p) = 2/p - e^{-p}/p = (2 - e^{-p})/p$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e^(-p).

Par définition de la fonction de transfert, S(p) = H(p)E(p). On remplace H(p) par 1/(p + 1) et E(p) par 2/p - e^{-p}/p. En distribuant le facteur 1/(p + 1), on obtient les deux termes demandés, avec le facteur de retard e^{-p} conservé dans le second.

S(p) = 2/[p(p + 1)] - e^{-p}/[p(p + 1)].

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> S(p) = 2/[p(p + 1)] - e^{-p}/[p(p + 1)].

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Pour vérifier l'égalité, on met les deux fractions du membre de droite au même dénominateur. Leur numérateur devient (p + 1) - p, soit 1. Le dénominateur est p(p + 1), ce qui donne bien le membre de gauche, pour p différent de 0 et de -1.

1/p - 1/(p + 1) = [(p + 1) - p]/[p(p + 1)].

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Question 3. Donner les transformées inverses de Laplace de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1).

On utilise le formulaire : 1/p est la transformée de U(t), et 1/(p + 1) celle de e^{-t}U(t). La multiplication par e^{-p} applique un retard d'une unité : un signal h(t) devient h(t - 1)U(t - 1). On applique cette propriété aux deux transformées précédentes pour obtenir les deux signaux retardés.

- 1/p : U(t).
- 1/(p + 1) : e^{-t}U(t).
- e^{-p}/p : U(t - 1).
- e^{-p}/(p + 1) : $e^{-(t - 1)}$U(t - 1).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : U(t), e^{-t}U(t), U(t - 1), $e^{-(t - 1)}$U(t - 1).

Question 4. **Déduire des résultats précédents l'expression du signal de sortie s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

La décomposition précédente donne $S(p) = 2(1/p - 1/(p + 1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p + 1))$. Les termes retardés ont pour facteur $U(t - 1)$, donc ils sont nuls sur [0 ; 1[. Pour t dans cet intervalle, les termes non retardés ont pour inverses $U(t)$ et $e^{-t}U(t)$, soit 1 et e^{-t}.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$: $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.**

On remplace t par 1 dans l'expression valable pour $t \geq 1$. Comme $e^{-1} = 1/e$, on simplifie :

$s(1) = (e - 2)/e + 1 = 2 - 2/e \approx 1{,}264$.

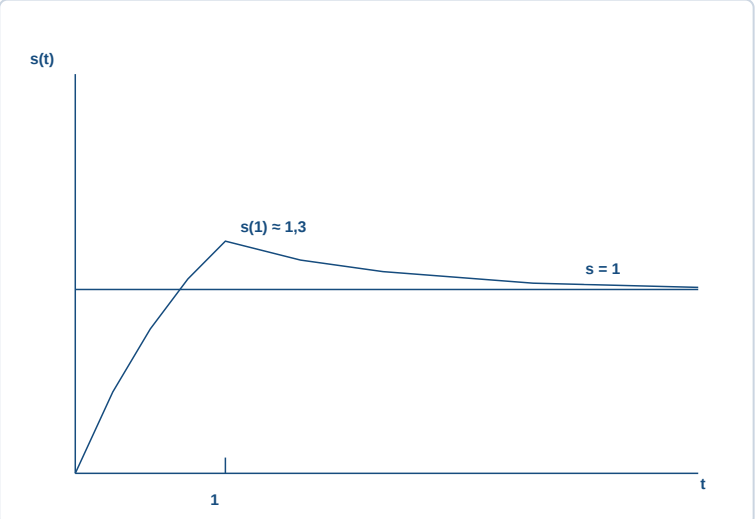
La valeur approchée au dixième est donc 1,3.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}3$.

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur [0 ; 1[, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$: la courbe part de (0 ; 0) et croît jusqu'à $s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}3$. Pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}$: elle décroît et reste au-dessus de 1, car e - 2 est positif. La courbe rejoint donc son maximum en t = 1 puis tend vers l'asymptote horizontale s = 1.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Maximum en (1 ; 1,3), puis décroissance vers l'asymptote s = 1.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, l'expression est $s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1$. Lorsque t tend vers +∞, e^{-t} tend vers 0. Le terme $(e - 2)e^{-t}$ tend donc également vers 0, et il ne reste que la constante 1.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Les coefficients sont 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot et un système électrique, et évalue équations différentielles, étude de fonctions, intégration, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène.
- Une limite finie de f(t) lorsque t tend vers +∞ donne une asymptote horizontale d'équation y = limite.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle considéré.
- La transformée de Laplace de f(t - a)U(t - a) est F(p)e^(-ap), ce qui permet de traiter un retard temporel.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir déterminé la solution générale de l'équation différentielle.
- Relier le signe de f' aux variations et vérifier si la vitesse tend vers zéro ou vers une valeur non nulle avant de conclure à un arrêt.
- Pour la distance, utiliser une primitive, respecter les bornes d'intégration et exprimer le résultat en mètres.
- Dans les transformées inverses, repérer e^(-p) comme un retard d'une unité et distinguer les intervalles avant et après t = 1.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre comme celle du chariot ?

Résolvez d'abord l'équation homogène associée. Cherchez ensuite une solution particulière de l'équation complète, puis additionnez les deux solutions. Utilisez enfin la condition initiale pour déterminer la constante.

Q : Comment interpréter le facteur e^(-p) dans une transformée de Laplace ?

Le facteur e^(-ap) correspond à un retard de a unités : la fonction est décalée et multipliée par U(t - a). Dans cet exercice, e^(-p) indique un retard d'une unité de temps.

Q : Comment utiliser la primitive pour calculer la distance parcourue ?

Intégrez la vitesse entre les deux instants. Si F est une primitive de f, la distance vaut F(t1) - F(t0). Exprimez le résultat en mètres et arrondissez au centimètre comme demandé.

Q : Quels sont le barème général, les outils autorisés et les critères de notation indiqués ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices de 10 points. Les calculatrices en mode examen et sans mémoire de type collège sont autorisées. Le sujet ne précise pas de barème détaillé par question.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-erpc.fr/assets/annales/bts-erpc/E2 - Mathématiques/2022/BTS ERPC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Études de Réalisation d : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.