Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ERPC

Mathématiques, groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle, étude de fonction et développement limité (14 questions) **Page 3**

2. Magasin de vélos : probabilités conditionnelles, loi binomiale et intervalle de confiance (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-erpc.fr/assets/annales/bts-erpc/E2 - Mathématiques/2023/BTS ERPC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle, étude de fonction et développement limité

La distance entre le fond d’un tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres. L’exercice mobilise la résolution d’une équation différentielle, l’étude des variations, l’exécution d’un algorithme et l’exploitation d’un développement limité.

Partie A : Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Le produit est nul si l’un de ses facteurs est nul.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. Résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 en utilisant le tableau fourni.

Les racines de l’équation caractéristique sont réelles et distinctes : -1 et -4. La solution générale est donc une combinaison linéaire des exponentielles correspondantes.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la position initiale du point M et de sa vitesse à l’instant t = 0, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La distance initiale est la valeur de la fonction à $t = 0$. La vitesse de rapprochement donnée est la dérivée de cette distance à cet instant.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. En admettant l’expression donnée de f, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans la fonction donnée :

$$f(2) = \frac{70}{3} e^{-2} - \frac{10}{3} e^{-8}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm, soit environ $3{,}157$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.

À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm, donc la distance est inférieure à $0{,}5$ cm. La fonction étant décroissante, le seuil a été franchi avant 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le constructeur a raison : le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B : Étude de fonction

Question 1.a. En utilisant la limite rappelée pour la fonction exponentielle, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

Lorsque $t \to +\infty$, les deux exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent vers 0. La combinaison linéaire qui définit $f(t)$ tend donc également vers 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. En déduire une équation de l'asymptote à la courbe représentative de f.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 0. La courbe admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi,

$$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

Comme $f'(t) < 0$ sur l'intervalle, f y est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36 jusqu'à son arrêt, en donnant les valeurs de t, de f(t) arrondies à 10^{-2}, ainsi que les résultats du test de condition.**

Le temps augmente de $0{,}1$ seconde à chaque ligne. Le test reste vrai tant que $f(t) > 0{,}5$.

Ligne	t	$f(t)$**, arrondi à** 10^{-2}	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le test devient faux à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$.

Question 3.b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.**

1. À $t = 3{,}8$, le test est vrai car $f(3{,}8) \approx 0{,}52 > 0{,}5$.
2. Après l'incrément, $t = 3{,}9$ et $f(3{,}9) \approx 0{,}47$: le test devient faux.

L'algorithme s'arrête donc au premier dixième de seconde où la distance passe sous le seuil.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s ; le tiroir est alors fermé selon le seuil fixé.

Question 4.a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. Ici, $f(0) = 20$ et $f'(0) = -\frac{70}{3} + \frac{40}{3} = -10$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

T : $y = 20 - 10t$.

Question 4.b. Parmi les propositions, recopier la seule réponse exacte donnant le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

La partie régulière du développement limité donnée dans le sujet est $20 - 10t - 15t^2$. Le reste d'un développement limité à l'ordre deux s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, où $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 4.c. À partir des propositions, indiquer si la courbe C est au-dessus ou en dessous de sa tangente T au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

La tangente a pour équation $y = 20 - 10t$. Le développement limité donne $f(t) - (20 - 10t) = t^2(-15 + \varepsilon(t))$. Comme $\varepsilon(t) \to 0$, ce terme est négatif pour $t > 0$ suffisamment proche de 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe C est en dessous de la tangente T au voisinage de 0.

2. Magasin de vélos : probabilités conditionnelles, loi binomiale et intervalle de confiance

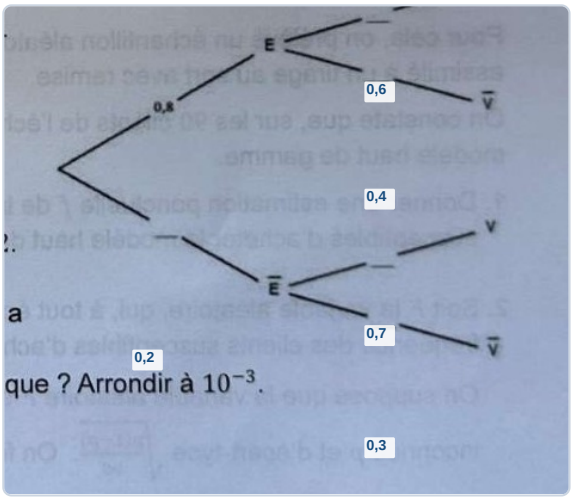
Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques dans l'espoir de conclure une vente, et suit la durée de main-d'œuvre nécessaire aux réparations. Il cherche également à estimer la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A : Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'issue du prêt, vente ou absence de vente.

La première bifurcation distingue les vélos électriques E des vélos mécaniques $\overline{E}$. La branche vers E porte déjà la probabilité 0,8 sur le schéma. Les probabilités des deux branches issues d'un même nœud doivent totaliser 1 : on complète donc chaque probabilité de vente par celle de l'absence de vente. Les cinq étiquettes manquantes sont ajoutées directement sur l'arbre.

Arbre pondéré complété



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(E) = 0,8$, $P(\overline{E}) = 0,2$; $P_E(V) = 0,6$, $P_E(\overline{V}) = 0,4$; $P_{\overline{E}}(V) = 0,7$, $P_{\overline{E}}(\overline{V}) = 0,3$.

Question 2. Déterminer la probabilité P(E ∩ V) qu'un vélo prêté soit électrique et que le prêt débouche sur une vente.

Dans l'arbre, l'événement $E \cap V$ correspond au chemin « vélo électrique, puis vente ». La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités inscrites sur ses branches. La probabilité de choisir un vélo électrique est 0,8 et, parmi ces vélos, la probabilité que le prêt débouche sur une vente est 0,6. On multiplie donc ces deux probabilités.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(E \cap V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Les vélos électriques et mécaniques forment deux catégories incompatibles qui couvrent tous les prêts. L'événement V peut donc se réaliser par l'un ou l'autre des deux chemins menant à une vente. La probabilité du chemin mécanique et vente vaut $0,2 \times 0,7 = 0,14$.

On additionne cette valeur à celle du chemin électrique et vente, soit 0,48.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0,48 + 0,14 = 0,62$.

Question 4. **Sachant que le prêt d'un vélo a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

1. On cherche la probabilité qu'un vélo soit électrique sachant que son prêt a débouché sur une vente. La formule de probabilité conditionnelle donne $P_V(E) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)}$.
2. Les résultats précédents donnent $P(E \cap V) = 0,48$ et $P(V) = 0,62$. On effectue le quotient, puis on arrondit au millième demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_V(E) = \frac{0,48}{0,62} \approx 0,774$.

Partie B : Loi binomiale

Question 1. **Sachant que X suit une loi binomiale, donner ses paramètres pour l'échantillon de 80 vélos réparés et la probabilité qu'une réparation nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre.**

On considère chaque réparation comme une épreuve de Bernoulli : le succès est « moins d'une heure de main-d'œuvre », de probabilité 0,62. L'échantillon comporte 80 vélos, et X compte le nombre de succès. Puisque l'énoncé indique que X suit une loi binomiale, son premier paramètre est l'effectif des épreuves et son second la probabilité de succès.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$.

Question 2. **Déterminer la probabilité P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.**

Pour une loi binomiale de paramètres 80 et 0,62, obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure signifie compter 40 succès et 40 échecs. La formule binomiale donne $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(0,38)^{40}$, car la probabilité d'un échec est $1 - 0,62 = 0,38$. Le résultat est arrondi au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X = 40) \approx 0,008$.

Question 3. **Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.**

1. Si X réparations nécessitent moins d'une heure, alors $80 - X$ nécessitent plus d'une heure. La condition demandée s'écrit donc $X > 80 - X$, soit $X > 40$.
2. On cherche ainsi la somme des probabilités binomiales pour les valeurs de X de 41 à 80. Équivalemment, on calcule $1 - P(X \leq 40)$, puis on arrondit au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X > 40) \approx 0,981$.

Partie C : Intervalle de confiance

Question 1. **À partir de l'échantillon de 90 clients, dont 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.**

L'estimation ponctuelle demandée est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 90 clients interrogés, 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. On divise donc le nombre de clients concernés par l'effectif total : $f = \frac{54}{90}$. Cette fréquence fournit l'estimation de la proportion inconnue p.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0,6$, soit 60 %.

Question 2.a. **En utilisant la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.**

La formule fournie s'applique avec la fréquence observée $f = 0,6$ et l'effectif $n = 90$. La marge d'erreur vaut $1,96\sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{90}} \approx 0,101214$. Les bornes s'obtiennent en soustrayant puis en ajoutant cette marge à 0,6.

On arrondit les bornes au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\,;\,0,701]$.

Question 2.b. Indiquer si l'on est certain que la proportion p appartient à l'intervalle de confiance obtenu.

Le niveau de confiance de 95 % décrit la fiabilité de la méthode utilisée : si l'on répétait de nombreux prélèvements et calculs dans les mêmes conditions, environ 95 % des intervalles obtenus contiendraient la proportion réelle. Pour l'intervalle calculé à partir de cet échantillon particulier, cette méthode ne garantit donc pas que p soit effectivement comprise entre ses bornes.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, on n'est pas certain que p appartienne à cet intervalle.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf en Traitement des matériaux où il est 3. Deux exercices de 10 points évaluent équations différentielles, analyse de fonctions, probabilités, loi binomiale et estimation d'une proportion, à travers un tiroir et un magasin de vélos.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre ay'' + by' + cy = 0, on résout l'équation caractéristique ar² + br + c = 0 et on utilise ses racines.
- Si f'(t) < 0 sur un intervalle, f y est strictement décroissante.
- Pour X suivant une loi binomiale B(n,p), P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^(n-k).
- L'intervalle de confiance fourni est f ± 1,96√(f(1-f)/n), où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance f(0) de la vitesse f'(0) et respecter leurs unités.
- Pour l'algorithme, vérifier la valeur de f(t) et la condition de boucle à chaque ligne jusqu'à l'arrêt.
- Dans un arbre pondéré, multiplier les probabilités le long d'un chemin et additionner les chemins qui réalisent l'événement.
- Pour comparer les durées, traduire strictement « supérieur » en une inégalité portant sur X et 80 − X.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du tiroir ?

Résoudre d'abord l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0. Ses racines déterminent les exponentielles de la solution générale. Les conditions f(0) et f'(0) permettent ensuite de déterminer les constantes.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un prêt de vélo débouche sur une vente ?

Calculer la probabilité de vente pour chaque type de vélo en multipliant les probabilités des branches correspondantes, puis additionner ces probabilités. Il faut tenir compte des vélos électriques et mécaniques.

Q : Comment traduire la comparaison des durées de réparation ?

Si X compte les réparations de moins d'une heure, les autres réparations sont au nombre de 80 − X. La condition demandée est X > 80 − X, soit X ≥ 41, et se calcule avec la loi binomiale.

Q : Un intervalle de confiance à 95 % garantit-il que la proportion s'y trouve ?

Non. L'intervalle est calculé à partir de la fréquence observée et donne un niveau de confiance de 95 % selon le modèle indiqué. Il ne permet pas d'affirmer avec certitude que la proportion inconnue appartient à cet intervalle.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-erpc.fr/assets/annales/bts-erpc/E2 - Mathématiques/2023/BTS ERPC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Études de Réalisation d : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.