Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ERPC

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) **Page 3**

2. **Série de Fourier d'une fonction périodique paire** (10 questions) **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-erpc.fr/assets/annales/bts-erpc/E2 - Mathématiques/2023/BTS ERPC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le point O, au fond du meuble, et le point M, au fond du tiroir, est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie la fermeture à l'aide d'une équation différentielle, puis analyse la fonction obtenue, le seuil de fermeture et la position moyenne du tiroir.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Pour l'équation du second degré, le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Les deux solutions sont donc $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. À l'aide du tableau fourni sur les équations différentielles linéaires du second ordre, résoudre l'équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0.

L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4. Le tableau fourni associe alors à chacune une exponentielle, et la solution générale est leur combinaison linéaire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir des conditions initiales, déterminer f(0) et f'(0). À l'instant t = 0, la distance OM est de 20 cm et le tiroir se déplace vers O avec une vitesse de -10 cm·s⁻¹.

À l'instant initial, la distance OM donne directement $f(0) = 20$. La vitesse de déplacement étant la dérivée de la distance et valant -10 cm·s^{-1}, on obtient $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On évalue la fonction à $t = 2$:

$$f(2) = \frac{70}{3} e^{-2} - \frac{10}{3} e^{-8}.$$

Cette expression exacte donne la distance OM en centimètres, deux secondes après le début de la fermeture.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.

La fonction est décroissante sur $[0; +\infty[$. À 4 secondes,

$$f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,4274 \text{ cm}.$$

Cette distance est inférieure au seuil de 0,5 cm. Comme la décroissance est stricte, le seuil a été franchi avant 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le constructeur a raison : le tiroir est fermé en moins de 4 s.

Partie B

Question 1.a. Pour f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t} sur [0 ; +∞[, en utilisant que $\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, déterminer $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

Quand $t \to +\infty$, on a $e^{-t} \to 0$ et $e^{-4t} = (e^{-t})^4 \to 0$. Chaque terme de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ tend donc vers 0, et leur différence tend également vers 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de la limite obtenue une équation de l'asymptote à la courbe représentative C de f.

La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ est 0. La courbe se rapproche donc de la droite horizontale d'ordonnée 0, qui est l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive chaque exponentielle avec la règle $(e^{at})' = ae^{at}$:

$$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$$

Le second terme est positif, car la dérivée de $-\frac{10}{3}e^{-4t}$ vaut $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$

Question 2.b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

Comme $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante. Son départ vaut $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ est 0.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 0$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, jusqu'à son arrêt. Indiquer pour chaque valeur de t la valeur de f(t), arrondie à 10^{-2}, et si la condition $(70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t} > 0{,}5$ est vraie ou fausse.**

À chaque passage dans la boucle, t augmente de 0,1. On évalue $f(t)$ à chaque étape et la boucle s'arrête lorsque la condition $f(t) > 0,5$ devient fausse.

Ligne	t	$f(t)$**, arrondie à** 10^{-2}	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'algorithme s'arrête à la ligne 39.

Question 3.b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

La boucle continue tant que $f(t) > 0,5$. À $t = 3,8$, cette condition est encore vraie ; après l'incrément suivant, $t = 3,9$ et $f(3,9) \approx 0,47$, donc la condition devient fausse et l'algorithme s'arrête.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3,9$ s : le tiroir est fermé, car $f(3,9) < 0,5$ cm.

Question 4. **La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t) dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.**

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi,

$$m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big) = \frac{1}{4}\left(-\frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16} + \frac{65}{6}\right).$$

En simplifiant, on obtient l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$ cm.

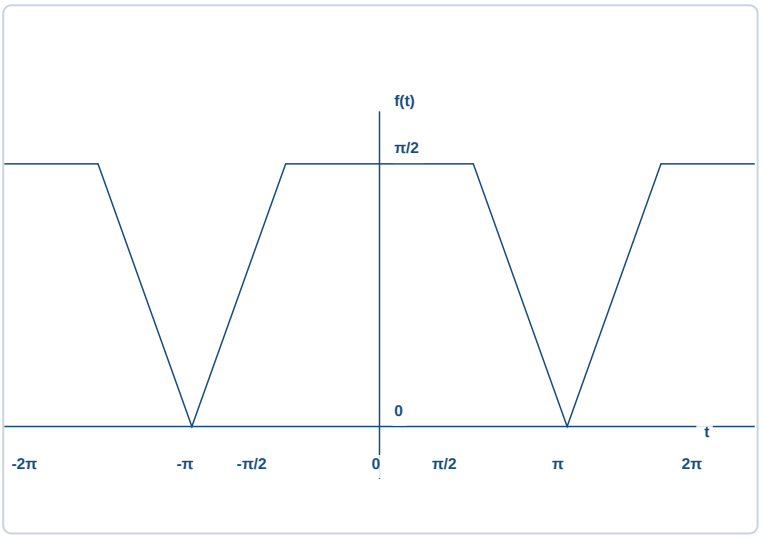
2. Série de Fourier d'une fonction périodique paire

On étudie une fonction paire de période 2π, définie sur [0 ; π] par deux expressions selon l'intervalle. Les questions portent sur son tracé, ses coefficients de Fourier et une somme partielle, puis sur l'approximation de sa valeur efficace à l'aide de trois courbes proposées.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle [-2π ; 2π], sachant que f est périodique de période 2π, paire, et que f(t) = π/2 pour 0 ≤ t < π/2 puis f(t) = π - t pour π/2 ≤ t ≤ π.

Sur chaque période de longueur 2π, la fonction vaut $\pi/2$ sur le plateau centré en un multiple de 2π, puis descend ou remonte linéairement jusqu'à zéro aux multiples impairs de π. Le tracé ci-dessous respecte ces raccords sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Tracé périodique pair : maximum $\pi/2$ aux multiples de 2π, zéros aux multiples impairs de π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n de f est nul.

Sur une période centrée en zéro, le coefficient sinus s'écrit $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. Comme f est paire et $\sin(nt)$ est impaire, leur produit est impair. Son intégrale sur l'intervalle symétrique $[-\pi;\pi]$ est donc nulle, quel que soit l'entier $n \geq 1$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. **Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

La pulsation d'une fonction périodique de période T est $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ici, la période vaut 2π, donc $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ radian par unité de temps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1$.

Question 4. **Démontrer que le coefficient constant de Fourier a₀ est égal à 3π/8.**

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et la parité, cela devient $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt$. On intègre séparément le plateau et la partie affine : $a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt\right) = \frac{3\pi}{8}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt) dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt) dt.**

Pour une fonction paire, le formulaire donne $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare l'intégrale en $[0;\pi/2]$ et $[\pi/2;\pi]$, où les expressions de f diffèrent. Sur le premier intervalle, $f(t) = \pi/2$, ce qui simplifie le facteur $\frac{2}{\pi}$.

On obtient ainsi l'égalité demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$, pour $n \geq 1$.

Question 6. **En admettant que aₙ = 2/(πn²) (cos(nπ/2) - cos(nπ)), déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.**

On applique la formule admise et les valeurs usuelles des cosinus aux angles $n\pi/2$ et $n\pi$. Les calculs donnent les coefficients suivants :

Coefficient	Calcul	Valeur exacte
a_1	$\frac{2}{\pi}(0-(-1))$	$\frac{2}{\pi}$
a_2	$\frac{2}{4\pi}(-1-1)$	$-\frac{1}{\pi}$
a_3	$\frac{2}{9\pi}(0-(-1))$	$\frac{2}{9\pi}$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$

Question 7. Déduire l'expression de $s_3(t)$, la somme partielle de Fourier d'ordre 3, à partir des coefficients obtenus.

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$. Les coefficients sinus étant nuls, on remplace les coefficients cosinus par ceux déterminés précédemment pour obtenir l'expression de s_3.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.

La somme partielle est paire, présente un maximum autour de $t = 0$ et des creux autour de $t = \pm\pi$. Parmi les trois propositions de la page 5, seule la courbe numéro 3 présente cette forme périodique.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

En utilisant les coefficients obtenus, on calcule $P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right]$. Après réduction, $P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$, puis on arrondit à 10^{-4} près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437.$

Question 9.b. Sachant que F est la valeur efficace de f, que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur correspondant parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le pourcentage d'erreur vaut $100 \times \frac{|P - F^2|}{F^2}$. En utilisant $P \approx 1{,}6437$ et $F^2 = \pi^2/6$, on obtient une erreur d'environ $0{,}074\,\%$. Ce résultat correspond au plus proche des trois choix proposés.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Choix : $0{,}1\,\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle porte sur la fermeture d'un tiroir, modélisée par une équation différentielle et une fonction, puis sur les séries de Fourier d'une fonction périodique, le calcul de coefficients et l'approximation de sa valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- L'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$ permet de déterminer la solution générale de $y'' + 5y' + 4y = 0$.
- La fermeture du tiroir correspond au premier instant où la distance $f(t)$ devient strictement inférieure à 0,5 cm.
- Pour une fonction paire de période T, $b_n = 0$ et $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$.
- La position moyenne sur [0 ; 4] est $m = (1/4)\int_0^4 f(t)dt$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : f est une distance en centimètres et t un temps en secondes.
- Dans l'algorithme, tester la condition avec la valeur courante de t avant d'ajouter le pas p = 0,1.
- Distinguer le terme constant a_0 des coefficients de Fourier a_n et b_n.
- Pour la question à choix multiple sur l'erreur, sélectionner une seule réponse parmi les trois proposées.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment exploiter les conditions initiales dans l'exercice du tiroir ?

La distance initiale donne $f(0) = 20$. La vitesse initiale est la dérivée de la distance, donc $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}. Ces deux conditions permettent de déterminer les constantes de la solution générale de l'équation différentielle.

Q : Comment déterminer les coefficients de Fourier pour cette fonction paire ?

La parité entraîne $b_n = 0$ pour tout n supérieur ou égal à 1. Pour calculer a_n, utilisez la formule adaptée à une fonction paire, puis séparez l'intégrale aux bornes où l'expression de f change.

Q : Comment répartir son temps pendant l'épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Répartissez le temps entre l'étude du tiroir et les séries de Fourier, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et les arrondis. La calculatrice est autorisée.

Q : Quelles précautions prendre pour les réponses sans justification ?

La question 8 demande seulement d'indiquer la courbe correspondant à s_3. Pour la question 9.b, recopiez une seule option parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Le sujet précise qu'aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-erpc.fr/assets/annales/bts-erpc/E2 - Mathématiques/2023/BTS ERPC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Études de Réalisation d : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.